

Wahadło tłumione (*tłumienie nieeksponencjalne*)

Program: Coach 7

Projekt: [\PTSNDysk](#) \Coach7\13 Wahadło tłumione

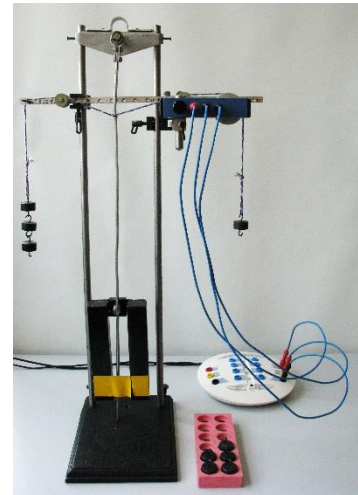
Ćwiczenie: *Wahadło_t_zestaw.cma7*

Przykład wyników: *Wyniki.cmr7*

Program: *maksima_amplitudy.exe*

Modelowanie: *Wahadło_tlumione_model.cma7*

Przykład wyników: *Wahadło_tlumione_model.cmr7*

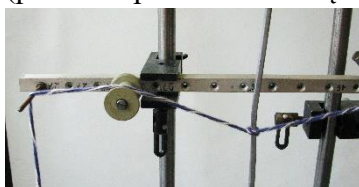
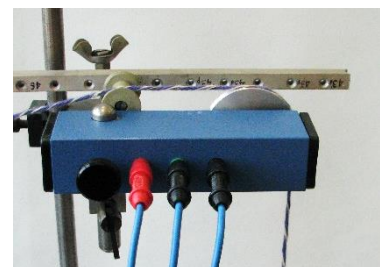


Cel ćwiczenia

- Pokazanie przykładu nieeksponencjalnego – w przybliżeniu liniowego zaniku amplitudy drgań wahadła;
- Sprawdzenie numeryczne słuszności wzorów opisujących ruch wahadła – modelowanie.

Układ pomiarowy

Wahadło umieszczone jest na statywie. Ruch wahadła przenoszony jest poprzez linkę na obrotowy czujnik położenia. Czujnik położenia połączony jest z konsolą pomiarową *CoachLabII+* (wejście „4”) trzema kablami (gniazdo czerwone – zasilanie 5 V, zielone – sygnał, czarne – ziemia). Linkę można umieścić na powierzchni śruby wykorzystując w ten sposób siłę tarcia do tłumienia drgań. Zmieniając obciążenie linki (zmiana liczby ciężarków) można regulować wielkość siły tarcia. Przez zmianę miejsca przyłączenia linki do ramienia wahadła



(pionowe przesuwanie węzła linki wzdłuż ramienia wahadła) możliwa jest regulacja momentu siły tłumiącej działającej na wahadło. Nić można przewiesić także nie przez śrubę, lecz przez bloczek z lewej strony i obserwować ruch wahadła tłumionego w ten sposób.

Układ pomiarowy (podłączenia: czerwone gniazdo czujnika – czerwone gniazdo konsoli, zielone gniazdo czujnika – żółte gniazdo konsoli, czarne gniazdo czujnika – czarne gniazdo konsoli)



Ustawienia parametrów pomiaru


Rodzaj: *Pomiar w funkcji czasu*

Czas pomiaru: *60 s*

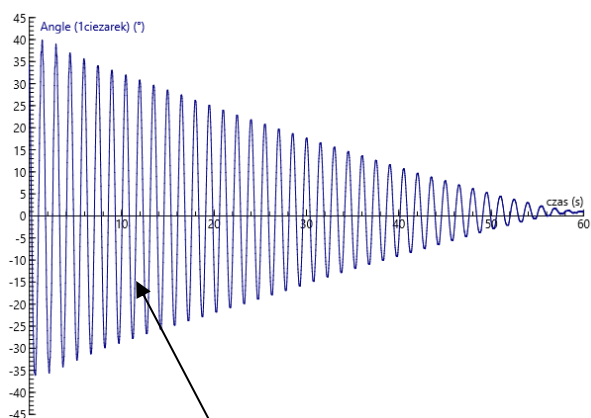
Częstotliwość: *50 na s*

Wyzwalanie: *wejście 4*, Kierunek: *W dół*, Poziom: *30*, Czas przed: *0.0*.

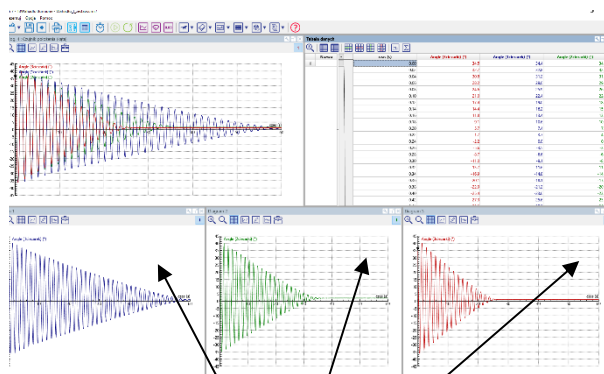
Pomiar

- Przewiesić nić przez śrubę (z lewej strony) i zawiesić wybraną liczbę ciężarków;
- Ustawić czujnik wychylenia w pozycji 0° . Wskazania można wyzerować również przez kliknięcie prawym przyciskiem myszy na ikonę sterownika i wskazanie polecenia „Ustaw\Wyzeruj”;
- Wychylić wahadło z położenia równowagi (kąt 35° na wskazaniu czujnika), rozpocząć pomiar – przycisk „Start” (F9)  i puścić wahadło;
- Powtórzyć pomiar dla innej liczby ciężarków. Przed każdym pomiarem ustawić czujnik wychylenia w pozycji 0° .

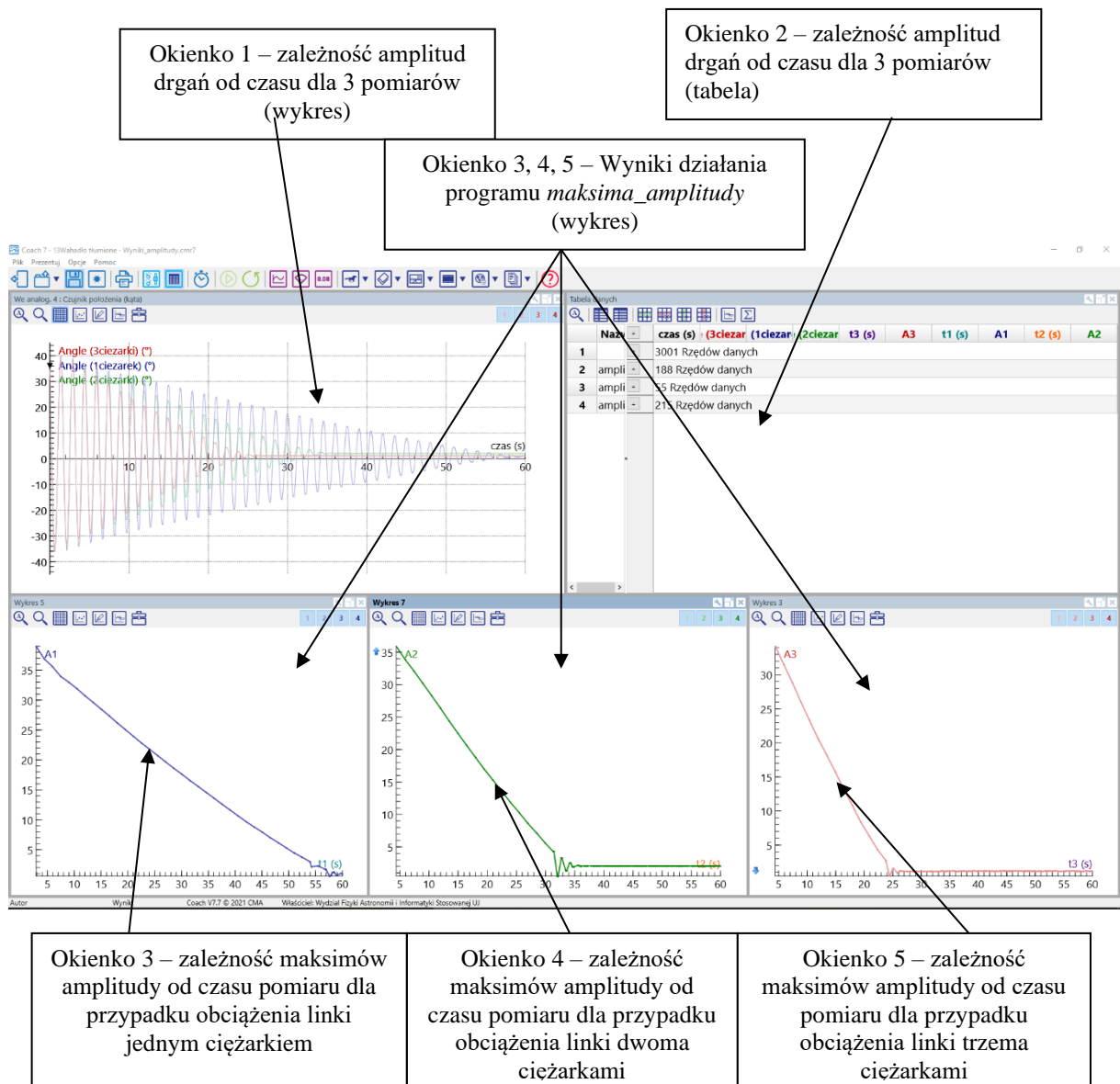
Można wykorzystać dolne okienka programu *Coach7* do przedstawienia wyników pomiarów uzyskanych dla różnej wartości siły tarcia (różne obciążenie linek



Widok pełnoekranowy



Wyniki uzyskane przy obciążeniu linki różną liczbą ciężarków



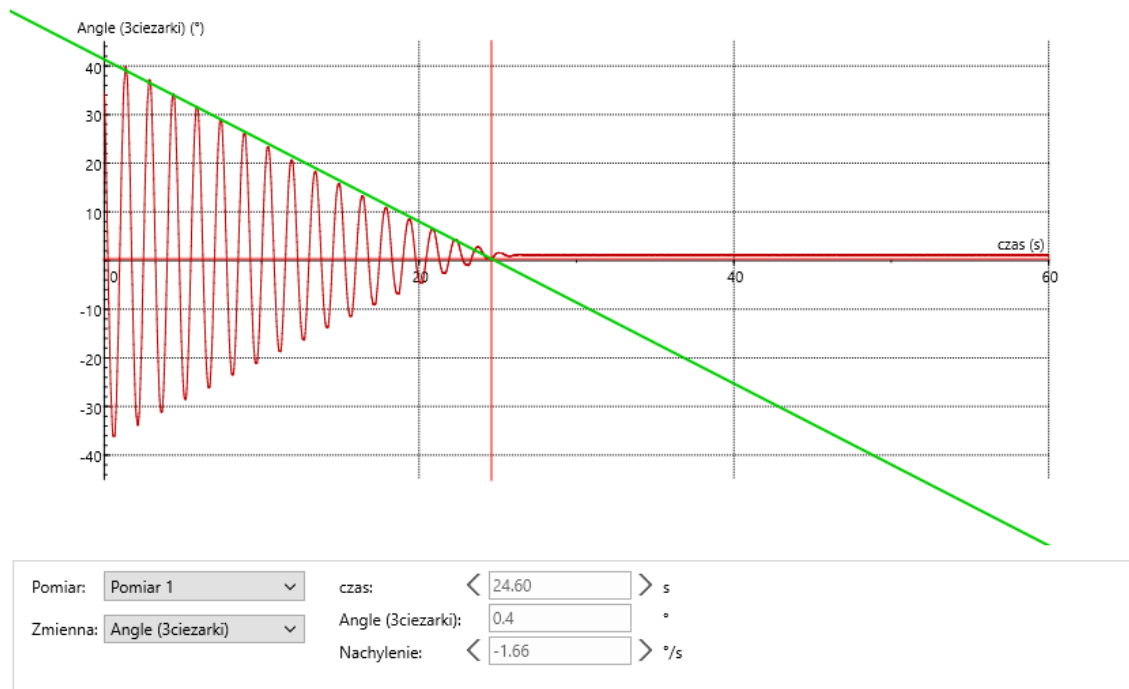
Obserwacje

Amplituda drgań maleje z czasem w przybliżeniu w sposób liniowy. Szybkość zmniejszania się amplitudy zależy od obciążenia nici, czyli od wielkości siły tarcia hamującej ruch wahadła. Dla niewielkich kątów wychylenia (do 20°) wahadła z położenia równowagi okres (częstość) drgań nie zmienia się z czasem.

Analiza wyników

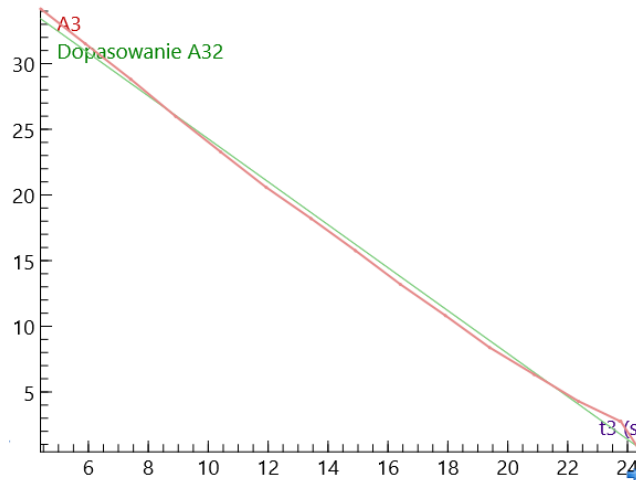
W celu pokazania, że w przypadku demonstrowanego wahadła występuje w przybliżeniu liniowe (niezależne od prędkości) tłumienie amplitudy drgań należy dopasować

linię prostą do maksimumów amplitudy. Służy do tego funkcja *Nachylenie* (prawy przycisk myszy na wykresie otwiera menu kontekstowe → *Analiza i przetwarzanie* → *Nachylenie*). W okienku wybrać odpowiedni wykres, klikając na jednym z maksimumów amplitudy ustawić „punkt zaczepienia” i dopasować za pomocą myszy prostą do pozostałych maksimumów.



Można również wykonać wykresy zależności maksimumów amplitud drgań od czasu, a następnie do otrzymanych punktów dopasować prostą. W tym celu napisano program „maksima_amplitudy”. Należy w *Tabeli danych* skopiować dane z pomiarów „2” i „3” do danych z pomiaru „1” i wyeksportować dane do pliku *txt* (prawy przycisk myszy → *Pomiary* → *Eksportuj do pliku CSV*). W ustawieniach eksportowania należy zaznaczyć kropkę jako „Separator dziesiętny” oraz średnik jako „Ograniczniki kolumn”. Wyeksportowane dane należy zapisać w folderze, w którym znajduje się program „maksima_amplitudy”. Po otwarciu w *Notatniku* usunąć z pliku wszelkie nagłówki i puste linijki na końcu pliku i zapisać jako plik **.txt*. Następnie uruchomić program i podać nazwę pliku bez rozszerzenia *txt*. Program przyjmuje pliki z danymi zawierające tylko i wyłącznie cztery kolumny. Jako wynik działania programu zostaną utworzone trzy pliki zawierające zależności maksimumów amplitud od czasu dla poszczególnych pomiarów. Należy w okienkach 3, 4 i 5 utworzyć puste wykresy. Do tabeli wczytać dane *Pomiary* → *Importuj plik CSV* → *Wybrać plik* → *Otwórz* → *OK* → wybrać *Separator dziesiętny: kropka*, *Ograniczniki kolumn: tabulator* oraz pierwszą zmienną zaznaczyć *Dodaj do tabeli danych* i wtedy zostanie przypisany *czas(s)*, natomiast drugiej

zmiennej wpisać nazwę. Kliknąć w odpowiednie okienko wykresu i wyświetlić dane w formie wykresu. Do otrzymanych danych dopasować linię prostą (prawy przycisk myszy → *Analiza i Przetwarzanie* → *Dopasowanie funkcji*)



Rysunek 1. Przykładowy wykres zależności maksymalów amplitud drgań od czasu. Do wykresu dopasowano funkcję liniową, by zobrazować liniowy charakter tłumienia

Uzyskane wyniki potwierdzają istnienie występowanie liniowego wygaszania amplitudy drgań. Można zaobserwować, że tłumienie rośnie wraz z dokładaniem kolejnych ciężarków – zwiększaniem siły tarcia.

Modelowanie

Najczęściej analizuje się ruch harmoniczny tłumiony siłą proporcjonalną do prędkości. Ruch taki opisuje równanie:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

Jeżeli tłumienie jest słabe, to rozwiązanie takiego równania daje drgania sinusoidalne o wykładniczo malejącej amplitudzie:

$$x = A \cdot e^{\frac{-bt}{2m}} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

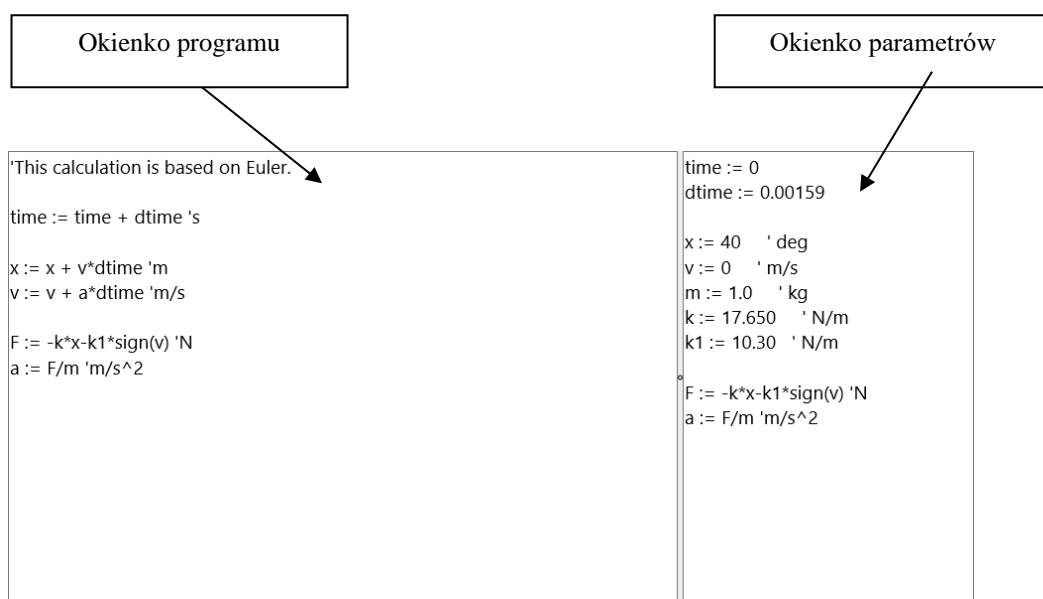
Jednak nie zawsze tłumienie jest proporcjonalne do prędkości, a amplituda maleje eksponencjalnie. W rzeczywistości często występuje także tarcie poślizgowe, którego siła jest skierowana przeciwnie do prędkości, ale jej wartość nie zależy od wartości prędkości. Ruch wahadła, tłumionego przez takie tarcie opisuje równanie:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \cdot \text{sign} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

Równania tego nie da się rozwiązać analitycznie, ale można wykonać jego numeryczną analizę. Wykorzystując podprogram „Modelowanie” można dokonać sprawdzenia czy powyższe równanie opisuje obserwowany ruch wahadła.

Otrzymane dane doświadczalne należy zapisać, a następnie otworzyć plik *Ten komputer\ PTŚN (Dysk)\ Coach7\ 13 Wahadło tłumione\ Wahadło_tlumione_model.cma7*

Do prawego okienka programu zaimportować swoje dane jako tło (prawy przycisk myszy → *Wczytaj wykres w tło*). Otworzyć okienko modelowania „Okno modelu”.



Rysunek 2. Okienko modelowania „Okno modelu”.

W „okienku programu” znajduje się treść programu, który krokowo oblicza wartość położenia, prędkości, siły działającej na wahadło oraz przyspieszenia. Uwzględniając podaną w „okienku parametrów” wartość kroku czasu *dtime* program wylicza:

- drogę pokonaną przez ciało poruszające się z aktualną prędkością w czasie *dtime* i nowe położenie ciała (tu program zakłada ruch jednostajny w czasie *dtime*),
- zmianę prędkości ciała poruszającego się z aktualnym przyspieszeniem w czasie *dtime* i prędkość, jaką ciało uzyskuje po tym czasie (tu program zakłada ruch jednostajnie zmienny w czasie *dtime*),
- nową siłę i przyspieszenie, jakim podlega ciało po czasie *dtime*.

Liczbę wykonywanych przez program kroków można zmienić w ustawieniach modelu



Ustawienia modelu

Liczba cykli: 30000

Warunki zatrzymania:

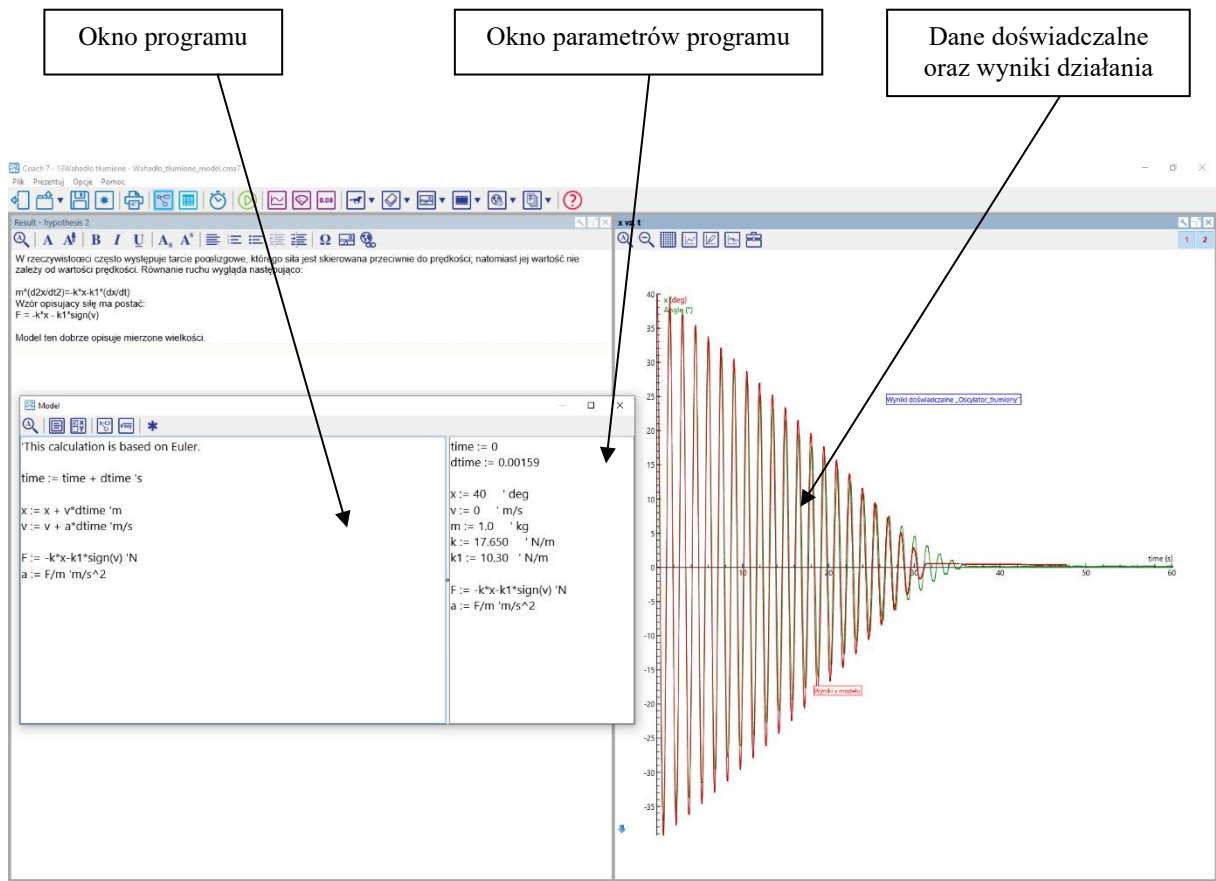
Zapisz dane co 1 cykle(i)

OK Anuluj

Rysunek 3. Ustawienia modelu.

W „Okienku parametrów” wpisano wartości początkowe parametrów wykorzystywanych w programie. Parametr $dtime$ jest krokiem, o jaki zmienia się czas pomiędzy kolejnymi wartościami liczonymi przez program. Od doboru wielkości tego kroku zależy precyzja modelowania. Im mniejszy krok zostanie wybrany tym dokładniejsze będą obliczenia (im bliżej siebie leżą, wyznaczone przez program, punkty, tym większa możliwość odtworzenia istoty zjawiska). Wraz ze zwiększaniem kroku czasowego zmniejsza się dokładność modelowania zjawiska (wyznaczone przez program punkty leżą coraz dalej od siebie). W tym modelu, badane zjawisko jest dobrze odtwarzane przy doborze kroku około 0,002 s.

Zmieniając wartości parametrów tłumienia k oraz kI , a także prędkości początkowej i wychylenia należy dopasować model do danych doświadczalnych. Dopasowanie takie pokazuje, że powyższy wzór można wykorzystać do opisu obserwowanego zjawiska. Dobrze odwzorowuje on ruch wahadła poza końcową fazą ruchu (bardzo małe wychylenia wahadła), gdzie występują dodatkowe (nieuwzględnione w modelu) zjawiska związane z układem doświadczalnym.



Rysunek 4. Okno modelowania zjawiska tłumienia nieeksponencjalnego.

Uwagi odnośnie doświadczenia:

- W końcowej fazie ruchu wahadła zmniejsza się tłumienie, co spowodowane jest rozciągliwością nici – wahadło się porusza, a nić nie przemieszcza się względem śruby;
- W modelu posłużono się przybliżeniem wahadła matematycznego.